РЕЦЕНЗИЯ

от проф. дмн Светозар Димитров Маргенов
Институт по информационни и комуникационни технологии – БАН

на дисертационния труд на
доц. д-р Милена Радославова Рачева
на тема

НОВИ ПОДХОДИ В КРАЙНОЕЛЕМЕНТНИЯ АНАЛИЗ ЗА ЕЛИПТИЧНИ ЗАДАЧИ
за присъждане на научната степен "Доктор на науките"

1. Актуалност

Компютърното моделиране е основен инструмент за изучаване на явления и процеси в науката и техниката. Все по-общоприето става разбирането за ролята на компютърното моделиране, като трети клон в съвременната наука, заедно с класическите теоретични и експериментални изследвания. Математическите модели на редица важни процеси и явления се описват с помощта на диференциални, интегрални и интегро-диференциални уравнения. Численото решаване на такива уравнения се базира на подходяща дискретизация и ефективни методи и алгоритми за тяхната реализация. В този смисъл, актуалността на изследванията в областта на метода но крайните елементи е безспорна.

Дисертацията на доц. Милена Рачева е в областта на изчислителната математика. Тя включва анализ на нестандартни варианти на метода на крайните елементи (МКЕ) за решаване на елиптични гранични задачи от втори и четвърти ред, както и свързани с тях спектрални задачи за намиране на собствени числа и собствени вектори.

2. Цели и задачи

Целите и задачите на дисертационния труд включват:

- Изследвания на варианти на смесен метод на крайните елементи за спектрални задачи от четвърти ред, в това число уточняващи алгоритми (post-processing) за повишаване на точността на решението.
- Изучаване на нови подходи в МКЕ за задачи с нелокални гранични и интерфейсни условия.
- Изследвания на неконформни методи на крайните елементи с интегрални интерполационни условия (степени на свобода).
- Приложения на получените теоретични резултати за извеждане на вариационна постановка на математически модели и числено решаване на едномерни инженерни задачи.

Представените в дисертацията изследвания са много добре мотивирани и насочени към актуални и амбициозни задачи. Тяхното решаване изисква задълбочени познания в областта на теоретичните основи на метода на крайните елементи, в това число теория на частни диференциални уравнения, диференциални оператори и функционален анализ. Доказателството на редица основни резултати е свързано с преодоляване на сериозни трудности и математическа изобретателност.

3. Структура и съдържание

Дисертацията е в обем от 300 страници и се състои от увод, четири глави и библиография. Резултатите са онагледени с 38 фигури и 18 таблици. Библиографията включва 149 заглавия, които обхващат работи в периода от 1961 г. до 2012 г.

Увод

Уводът е в обем от 14 страници и включва мотивировка и актуалност на темата, цели и задачи, както и организация на изложението в дисертацията.

Глава 1

Тази глава е озаглавена “Смесен МКЕ за спектрални и интегро-диференциални задачи – вариационни аспекти и оценки”. Тя се състои от седем раздела на 74 страници. Във въведението са дадени някои преимущества на смесените вариационни методи и в частност смесения МКЕ. В раздели 1.2 и 1.3 е представена смесена вариационна постановка на едномерни и многомерни спектрални задачи от четвърти ред. Много подробно е разказано, как се получават достатъчни условия за симетрия при начална абстрактна постановка на смесената вариационна задача. Раздел 1.4 е посветен на постпроцедура (уточняваща процедура) за ускоряване на сходимостта за смесения МКЕ за бихармоничната спектрална задача. Предложеният „метод на двете пространства” развива идеята на Шу и Жу за „метод на двете мрежи”. Получените нови резултати демонстрират в този случай някои сериозни преимущества, свързани с изчислителната сложност на p – метода пред h – метода. Уточненото решение с оценка на грешката от тип суперсходимост се получава само с помощта на решаването на една допълнителна елиптична задача върху същата мрежа, но с крайни елементи от по-висока (трета) степен. Нека напомним, че изчислителната сложност на численото решаване на елиптична задача е съществено по-малка от сложността на решаване на спектрална задача. Раздел 1.5 изследва интересния и по-труден за анализ случай на ускоряване на сходимостта при използване на линейни крайни елементи в смесения МКЕ за бихармоничната спектрална задача. Специално място в тази глава заема раздел 1.6, където е изследван смесен МКЕ за интегро-диференциален модел от теория на вискоеластичността. Задачата е много актуална и доста трудна. В края на раздела е получена оценка за устойчивостта на приближеното решение, която независимо че не е представена като теорема, е може би най-важният резултат по тази задача. В раздел 1.7 са показани резултати от числени експерименти. Както вече отбелязах, в тази глава особено добро впечатление правят резултатите в раздели 1.5 и 1.6.

Глава 2

Глава 2 е посветена на решаване на спектрални задачи с нелокални гранични и интерфейсни (по вътрешните граници) условия. В рамките на 55 страници са включени шест раздела. Във въведението е дадена кратка мотивация за изследванията, в това число някои приложни области, където възникват такива задачи. В раздел 2.2 е предложен общ подход за конструиране на вариант на МКЕ за решаване на спектрални задачи от втори ред с нелокални (интегрални) условия за съгласуване на решението по вътрешните граници и съгласувани константни нормални производни. Предложена е естествена дискретизация с конформни квадратични триъгълни и биквадратични правоъгълни елементи, където локалната (поточкова) степен на свобода в средите на страните е заменена с интегрална. Доказана е съгласувана оценка за сходимост. В раздел 2.3 е приложен метода на „двете пространства” и е получен резултат от тип суперсходимост. Тук е добре да отбележим доста високите изисквания за гладкост (включително несъгласувани), виж например оценки (2.33) и (2.36). Независимо от това резултатите правят много добро впечатление. Следваща стъпка в анализа на задачи с нелокални интерфейсни условия са задачите с интегрални условия върху застъпващи се подобласти, които са изследвани в раздел 2.4. Получена е оптимална по порядък съгласувана оценка за грешката за моделна задача в област съставена от два застъпващи се правоъгълника. При тази постановка част от анализа по същество е едномерен, което в частност дава възможност за получаване на точни оценки за близост на интерполанта. В раздел 2.5. са получени аналогични резултати за спектрална контактна задача, описваща преноса на маса и енергия между две допиращи се тела. Нелокалните контактни условия се налагат върху подобласт с ширина ε. Както и в предишната глава, последният раздел съдържа числови експерименти. Тази глава прави добро впечатление със своята кохерентност, при последователно усложняване на разглежданите задачи.

Глава 3

В тази глава са представени резултати свързани с анализ и приложения на неконформни крайни елементи. Със своите 82 страници това е най-голямата глава в дисертацията, включваща 11 раздела, в това число въведение и числени експерименти. Раздел 3.2 е наречен „Неконформен елемент на Крузе-Равиар от интегрален тип”. В случая на линейни неконформни елементи няма два типа интерполационни условия (поточкови и интегрални) и по тази причина не е правилно да се говори за „елемент от интегрален тип”. В следващия раздел са разгледани разширени линейни и ротирани билинейни (на Ранахер-Турек) неконформни елементи с добавена интегрална степен на свобода върху елемента. Представени са съгласувани оценки на грешката. В Раздел 3.4 е приложена идеята за повишаване на точността на приближеното решение посредством интерполация върху триъгълен макроелемент, състоящ се от 4 елемента на Крузе-Равиар. Раздел 3.5 е посветен на реализация в случая на неконформни елементи на метода на „двете пространства” за получаване на оценки от тип суперсходимост за спектрални задачи от втори ред. В следващите два раздела е изследван неконформен краен елемент на Зенкевич за числено решаване съответно на елиптични и спектрални задачи от четвърти ред. Доказани са съгласувани оценки на грешката, както и оценки с повишен порядък за спектралната задача, с помощта на метод на „двете пространства”. Принципно нов тип изследвания са представени в следващите 3 раздела. Добре известно е, че при прилагане на конформни крайни елементи, числено пресметнатите собствени стойности са по-големи или равни на точните. Тук целта е да се докаже, че при разглежданите неконформни крайни елементи са в сила долни граници за спектрални задачи от втори и четвърти ред. На тази основа, в раздел 3.10 е предложен алгоритъм за двустранни оценки на собствените стойности. В последния раздел 3.11 са представени числени експерименти за 6 моделни задачи. Тази глава има водеща роля в дисертацията. Това се определя не само от по-големия обем, но още повече от важността и трудността на формулираните в нея задачи задачи. За съжаление, в доказателствата на някои от най-важните теореми има съществени неточности и непълноти.

Глава 4

Целта на тази глава е да покаже, как теоретични резултати от дисертацията могат да се приложат за математическо моделиране и числено решаване на приложни задачи от областта на механика на конструкциите. Главата е озаглавена „Крайноелементно моделиране и анализ на задачи за греди". Приложенията са ограничени до едномерни (прътови) модели. Последователно са разгледани следните задачи: а) пресмятане на динамични напрежения в греда на еластична основа; б) греда върху основа с променлива коравина; в) модел на свредло, закрепено в тричелюстник; г) модел на ветрогенераторна перка. Без съмнение резултати от този тип са полезни за развитие на числените методи и тяхното приложение.

4. Апробация на представените резултати

Представеният списък на публикации по дисертационния труд включва 29 статии, публикувани в периода 2002 – 2012 г. От тях 5 са самостоятелни, а останалите са съвместни, както следва: 17 от двама автори, 6 от трима и една от четири. В международни списания и списания с *импакт фактор* са публикувани 8 работи, в това число: а) Computational Methods in Applied Mathematics – 1; б) Siberian Journal of Numerical Mathematics - 2; в) Mathematica Balkanica – 2; г) Journal of Computational and Applied Mathematics – 2; д) Comp. rend. Acad. Bulg. Sci. – 1. В специализирани томове на Springer Lecture Notes in Computer Science (LNCS) са публикувани 11 статии. Две от списанията, както и поредицата LNCS до 2005 г. са с *импакт фактор*.

Представен е също така списък на 51 цитирания на публикации, включени в дисертационния труд, както и 10 цитирания на други работи, които са свързани с тематиката на дисертацията. От всички цитирания, 34 са в работи на чуждестранни автори.

Авторефератът коректно представя резултатите, включени в дисертацията. Формулировката на основните научни приноси, съответства на изложението в дисертацията.

Представените публикации по дисертацията, както и справката за тяхното цитиране удовлетворяват изискванията на ЗРАС, ППЗРАС, както и специфичните изисквания в правилниците на БАН и на ИИКТ-БАН за присъждане на научната степен "Доктор на науките".

5. Критични бележки и препоръки

Имам съществени бележки по стила на дисертацията и математическата последователност и точност на формулировките. На места са съкратени съществени за строгостта на доказателствата обяснения. В същото време, доста подробно са представени сравнително тривиални разсъждения, както и някои верни но несвойствени за дисертация по изчислителна математика твърдения, като: „Най-важната мотивация за такъв алгоритъм е, че обикновено на практика точните стойности от спектъра на оператора са неизвестни", виж стр. 213.

Положителна оценка заслужава факта, че в края на всяка глава са приложени числени експерименти. За съжаление с малки изключения (виж Пример 1.2 на стр. 90) моделните задачи са максимално опростени, като по същество липсва анализ на получените резултати и как те потвърждават например порядъка в съответните теоретични оценки на грешката. Налага се да отбележа, че направените бележки и препоръки в този дух на предварителното обсъждане (предзащита) не са взети предвид в представената за защита дисертация.

На места терминологията ненужно се отклонява от вече възприети в българския език математически понятия (виж например стр. 64: „деформируема материя” вместо „деформируема среда”). Още по-неприемливо изглежда въвеждането на нови „български” думи, като „пач” и „пачове”.

Тези бележки са принципни и важни, особено когато оценяваме дисертация за придобиване на научната степен „доктор на науките”. В същото време, като рецензент бих си позволил да приема, че те не намаляват стойността на представените за защита резултати.

Не така стои обаче въпросът с неприемливите неточности и непълноти в математическите разсъждения и доказателства. Без стремеж към изчерпателност, ще се спра само на няколко такива случая:

1. В раздел 3.2 се говори за нов вариант на неконформен елемент на Крузе-Равиар от интегрален тип. Както вече беше отбелязано, това понятие е некоректно и невярно. Добре известно е, че стандартните линейни неконформни елементи дефинират пространство от функции, които са непрекъснати в интерполационните възли, т.е. в средите на страните на страните на триъгълниците, като в същото време съвпадат стойностите на интегралите на функциите, по страните на съседните крайните елементи. Това елементарно за проверка свойство е в основата на тяхната локална консервативност. Отново ще отбележа, че този въпрос беше поставен на предзащитата.

2. Доказателството на оценки на грешката в енергетична норма при конформни крайни елементи следва непосредствено от точността на интерполация и лемата на Сеа. В случая на неконформни елементи това не е така. Доказателството на Теорема 3.2 на стр. 163 завършва с твърдението: „От интерполационната теория в МКЕ, втората лема на Стренг [120] и (3.14) ще получим оценката (3.4).” По аналогичен начин незавършено е и доказателството на Теорема 3.1. Проблемът е, че в условията на втората лема на Стренг има втори член (освен оценката на точността на интерполация), който за всеки конкретен случай (неконформен краен елемент) трябва да се оцени отделно. Това би трябвало да е известно на дисертантката, тъй като при анализа на неконформния елемент на Зенкевич (виж стр. 186, Теорема 3.8) е дадена формулировката на втората лема на Стренг, като за съответния втори член в неравенството е цитирана оценка от [130].

3. Доказателството на Теорема 3.11 (стр. 195) е некоректно. Твърдението е, че числено пресметнатата собствена стойност е по-малка или равна на точната, като за целта трябва да се покаже, че сума от три члена (виж края на (3.63)) е неотрицателна. Показано е, че вторият и третият член са „малки”. Всичко щеше да е наред, ако първият положителен член е „голям”. Тук грешката е, че и за този член е доказана оценка от горе. Независимо, че в нея степента по малкия параметър h е по-малка, това по никакъв начин не ни дава основание (дори и в асимптотичен смисъл) да твърдим, че неравенството е доказано. По-нататък в доказателството (виж стр. 198, ред 11) се прави допълващо предположение за

регулярност на собствената функция. Това не е коректно. Предположенията се формулират в условията на теоремата.

4. Доказателството на Теорема 3.14 е незавършено или най-малкото се нуждае от съществени допълнителни обяснения. В (3.89) е показана оценка за първото собствено число. След това се твърди, че по аналогичен начин се получава доказателството за произволно следващо собствено число, като анализа се прави в ортогоналното допълнение на пространството, породено от предходните собствени числа. Идеята може би е вярна, но тя трябва да се реализира подробно и ясно.

Очевидно, направените критични бележки по никакъв начин не намаляват стойността на останалите резултати в дисертацията. Допускам, че доказателствата могат да бъдат коригирани. В същото време, не мога да приема в дисертация на това най-високо ниво да има пропуски от такова естество.

6. Лични впечатления

Познавам доц. Милена Рачева. Високо ценя нейната активна творческа работа на математик изследовател. Имам най-добри впечатления от съвместната работа по проекти през последните години.

7. Заключение

В дисертационния труд са представени научни и научно-приложни резултати, част от които са новост за науката, а други съществено обогатяват известни вече знания. За съжаление, допуснатите съществени неточности и непълноти в представените доказателства, както и останалите критични бележки **не ми дават основание** да препоръчам на научното жури да присъди на доц. д-р Милена Радославова Рачева научната степен “Доктор на науките” в професионално направление 4.5 „Математика”, научна специалност 01.01.09 “Изчислителна математика”.

2.08.2012 г.

София